

Všeobecná topológia – sada úloh č. 4

Každá z uvedených úloh má hodnotu 10 bodov. Rozumné je každú z nich začať na novej strane.

Ak sa rozhodnete riešenia písať v L^AT_EXu, tak mi pošlite zdroják aj pdf.

Úloha 1. Nech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sú topologické priestory, a nech $\mathcal{B}_X$ je báza topológie $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{B}_Y$ je topológia $\mathcal{T}_Y$.

Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je spojité práve vtedy, keď:

- a) Pre každé $V \in \mathcal{T}_Y$ platí $f^{-1}[V] \in \mathcal{T}_X$.
- b) Pre každé $V \in \mathcal{T}_Y$ a $x \in X$ také, že $f(x) \in V$ existuje $U \in \mathcal{T}_X$ také, že $x \in U$ a $f[U] \subseteq V$.

Zistite, či tieto ekvivalencie zostanú v platnosti, ak všade namiesto $\mathcal{T}$ napíšeme $\mathcal{B}$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite.)

Úloha 2. Nech $(D, \leq)$ je nahor usmernená množina a $x: D \rightarrow \mathbb{R}$ splňa

$$(\forall d, d' \in D)(d \leq d' \Rightarrow x_d \leq x_{d'}).$$

(T.j. je to neklesajúca sieť reálnych čísel.)

Dokážte, že ak je táto sieť zhora ohraničená, tak existuje jej limita $L = \lim_{d \in D} x_d$ a platí

$$L = \sup_{d \in D} x_d.$$

Úloha 3. Nech X je topologický priestor a $\mathcal{F}$ je filter na X . Dokážte, že $\{(b, F); b \in F \in \mathcal{F}\}$ s reláciou

$$(b_1, F_1) \leq (b_2, F_2) \Leftrightarrow F_1 \supseteq F_2$$

je nahor usmernená množina.

Ak na tejto nahor usmernenej množine definujeme sieť

$$x_{(b, F)} = b,$$

tak pre $a \in X$ platí:

- a) Táto sieť konverguje k a práve vtedy, keď $\mathcal{F} \rightarrow a$.
- b) Bod a je hromadný bod tejto siete práve vtedy, keď a je hromadný bod filtra $\mathcal{F}$.

Úloha 4. Ukážte, že ak priestor X splňa Tietzeho vetu, tak je normálny.

T.j. chceme ukázať, že X je normálny, ak pre každú uzavretú podmnožinu $A \subseteq X$ a každé spojité zobrazenie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ existuje spojité zobrazenie $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ také, že

$$F|_A = f.$$

Úloha 5. Nech $X = \{0, 1\}^\omega$ je súčin spočítateľne veľa kópií diskrétného dvojprvkového priestoru a nech $I = \langle 0, 1 \rangle$ je uzavretý jednotkový interval s obvyklou topológiou. Položme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}.$$

- a) Ukážte, že uvedený predpis priradí každému $x \in X$ práve jeden prvok $\varphi(x) \in I$, teda naozaj dostávame zobrazenie $\varphi: X \rightarrow I$.
- b) Ukážte, že zobrazenie φ je spojité.
- c) Ukážte, že zobrazenie φ je surjektívne. Je toto zobrazenie aj injektívne?
- d) Dajú sa veci dokázané v predchádzajúcich častiach využiť na dôkaz kompaktnosti priestoru $I = \langle 0, 1 \rangle$?